XXVII TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
PRIMAVERA DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL JUVENIL

1. Una mesa de billar con forma de rectángulo de 2×1 tiene en total 6 troneras: en los 4 vértices y en los puntos medios de cada lado largo. Determinar la menor cantidad de bolas que se deben colocar sobre la mesa (en el interior del rectángulo) para que cada tronera esté ubicada en una misma recta con al menos dos de las bolas. (Suponer que tanto las bolas como las troneras ocupan un punto cada una.)

4 PUNTOS

2. Mostrar que existen 100 pares de enteros positivos A y B, con $A \leq B$, tales que los números A y B tienen todos los dígitos mayores o iguales que 6 y además el número $A \cdot B$ que resulta de multiplicar A y B también tiene todos los dígitos mayores o iguales que 6.

ACLARACIÓN: Dos pares son distintos si hay por lo menos un número que figura en uno de los pares y no figura en el otro.

4 PUNTOS

3. Consideramos un triángulo acutángulo *ABC*. Sobre los lados *AB* y *BC* y hacia el exterior del triángulo se construyen dos rectángulos, *ABMN* y *BCKL*, tales que el lado *AB* es igual al lado *BL* y el lado *BC* es igual al lado *BM*. Demostrar que las rectas *AL*, *NK* y *MC* tienen un punto común.

5 PUNTOS

4. Decidir si es verdadero o falso que existe un entero positivo n tal que la representación decimal de 2^n comienza con 5 y la representación decimal de 5^n comienza con 2.
ACLARACIÓN: La representación decimal de 2^8 es 256, que comienza con 2; la representación decimal de 2^9 es 512, que comienza con 5.

5 PUNTOS

5. En cada casilla de un tablero de 2005×2006 se escribe 0, 1 ó 2. En cada fila la suma de todos los números es divisible por tres, y en cada columna, la suma de todos los números es divisible por 3. Determinar la mayor cantidad de 1's que puede haber en el tablero.

6 PUNTOS

6. Un polígono curvilíneo es un polígono en el que todos los lados son arcos de circunferencias. Decidir si existe un polígono curvilíneo y un punto *A* en su borde tal que toda recta que pasa por *A* divide al perímetro en dos partes y esas dos partes tienen igual longitud.

7 PUNTOS

7. Max tiene un tablero de 5×5 y en sus casillas se han escrito 25 números enteros distintos. Mini tiene una copia exacta del tablero de Max. Max marca el número más grande del tablero y borra todos los números de la fila y la columna de este número. Luego marca el más grande de los números que quedan aun escritos en el tablero y hace lo mismo: borra fila y columna, y así siguiendo hasta que en el quinto paso marca el único número aun escrito, y lo borra. Mini efectúa las mismas operaciones, pero marca cada vez el número más chico en vez del más grande.
(a) Determinar si puede ocurrir que la suma de los 5 números que marcó Mini sea mayor que la suma de los 5 números que marcó Max.

6 PUNTOS

(b) Determinar si puede ocurrir que la suma de los 5 números que marcó Mini sea mayor que la suma de cualquier otro conjunto de 5 números entre los que no haya dos en una misma columna ni dos en una misma fila.

2 PUNTOS

XXVII TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
PRIMAVERA DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL MAYOR

1. Dado un polígono convexo de 100 vértices, demostrar que se pueden marcar 50 puntos en su interior de modo tal que cada vértice pertenezca a una recta determinada por dos de los puntos marcados.

4 PUNTOS

2. Decidir si es verdadero o falso que existen enteros positivos n y k tales que los primeros dígitos de la representación decimal de 2^n son los dígitos de la representación decimal de 5^k y los primeros dígitos de la representación decimal de 5^n son los dígitos de la representación decimal de 2^k.
ACLARACIÓN: La representación decimal de 2^8 es 256 y sus primeros dígitos, 25, son los dígitos de la representación decimal de 5^2; la representación decimal de 2^9 es 512, y su primer dígito, 5, es el dígito de la representación decimal de 5^1.

5 PUNTOS

3. Consideramos el polinomio $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2$. Demostrar que para todo entero positivo n, el polinomio $\left(P(x)\right)^n$ tiene al menos un coeficiente negativo.

5 PUNTOS

4. En un triángulo ABC se traza la bisectriz AA', con A' en el lado BC. Sea X un punto del segmento AA'. Las rectas BX y AC se cortan en B', y las rectas CX y AB se cortan en C'. Los segmentos $A'B'$ y CC' se cortan en P, y los segmentos $A'C'$ y BB' se cortan en Q. Demostrar que $P\hat{A}C = Q\hat{A}B$.

6 PUNTOS

5. Demostrar que existen infinitos pares de enteros positivos A y B, con $A \leq B$, tales que los números A y B tienen todos los dígitos mayores o iguales que 7 y además el número $A \cdot B$ que resulta de multiplicar A y B también tiene todos los dígitos mayores o iguales que 7.
ACLARACIÓN: Dos pares son distintos si hay por lo menos un número que figura en uno de los pares y no figura en el otro.

6 PUNTOS

6. Hay 12 grillos en puntos distintos de una circunferencia. Esos puntos dividen la circunferencia en 12 arcos. Cada minuto todos los grillos saltan simultáneamente en el sentido de las agujas del reloj de acuerdo con la siguiente regla: si un grillo está en el punto A y su vecino en el sentido de las agujas del reloj está en B, entonces el grillo de A salta al punto medio del arco $\overset{\frown}{AB}$.
(a) Decidir si es posible que al cabo de 12 saltos al menos uno de los grillos regrese al punto de partida.

4 PUNTOS

(b) Decidir si es posible que al cabo de 13 saltos al menos uno de los grillos regrese al punto de partida.

3 PUNTOS

7. Una hormiga avanza por las aristas de un dodecaedro, recorriendo un camino cerrado y de modo que cada vez que llega a un vértice, si no completó el recorrido, cambia de arista. Se sabe que el camino pasa exactamente 2 veces por cada arista. Demostrar que hay al menos una arista que se recorre las dos veces en la misma dirección. (El dodecaedro tiene 20 vértices, 30 aristas y 12 caras iguales, con forma de pentágono; en cada vértice se encuentran 3 caras.)

8 PUNTOS